具有 Coulomb 摩擦热轧问题的逼近可解性*

宋叔尼 刘相华

(东北大学轧制技术及连轧自动化国家重点实验室,沈阳 110006)

摘要 针对热轧过程的刚塑性可压缩材料模型,讨论了塑性变形功率泛函梯度映射的性质. 并利用 Coulomb 摩擦条件下表面摩擦功率泛函次微分的存在性和单调性以及非线性分析的方法,证明了在 Coulomb 摩擦条件下可压缩材料模型热轧过程总能耗率泛函的逼近可解性成立.

关键词 可压缩材料 总能耗率泛函 逼近 $(S)_+$ 型映射 次微分

70年代末,Mori 和 Osakada 提出了刚塑性有限元中的可压缩方法[1,2],并把它应用于普通金属的成形分析. 此后,该方法在各类轧制问题的求解中得到了广泛的应用[3~5]. 但与之相应的理论问题的研究较少. 在刚塑性可压缩材料的变分原理[6]和热轧过程总能耗率泛函极值的存在与唯一性[7]被证明后,为了证实用刚塑性有限元可压缩法求得的解可以作为变分原理所要求的解[6],必须考虑其逼近可解性是否成立? 即对于热轧过程中关于位移速度的总能耗率泛函[7,8]

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= \varphi_w(v) + \varphi_f(v) + \varphi_t(v)\\ &= \frac{1}{m+1}\int_\Omega a\varepsilon^n \cdot \dot{\bar{\varepsilon}}^{m+1}\mathrm{d}\Omega + \int_{S_f}\tau_f \cdot \Delta v_f \mathrm{d}S + \int_{S_t} t \cdot v \mathrm{d}S,\end{aligned} \tag{1}$$

用有限元求解时,先将区域 Ω 作剖分,用节点速度表示单元能耗率泛函 $\varphi_k(v)$,这样,得到 $\varphi(v)$的逼近泛函 $\varphi_h(v) = \sum \varphi_k(v)$,若 v 和 v_h 分别是 $\varphi(v)$和 $\varphi_h(v)$的极小值点,是否有 v_h 收敛于 v? (1)式中 $\varphi_w(v)$, $\varphi_f(v)$, $\varphi_t(v)$分别表示热轧过程中的塑性变形功率泛函、在简化的 Coulomb 摩擦条件下接触表面上的摩擦功率泛函及外力功率泛函. 另外,有关轧制过程中的总能耗率泛函模型的建立,,边界条件以及(1)式中各符号的意义等可见文献[7,8].

为解决这一问题,本文首先证明了热轧过程中塑性变形功率泛函梯度映射是$(S)_+$型映射,其次由于在接触表面上简化的 Coulomb 摩擦功率泛函是不可微分的,我们利用该泛函的凸性,可得其次微分存在且是单调映射. 最后应用非线性分析方法,证明了具有 Coulomb 摩擦和可压缩材料模型热轧过程的总能耗率泛函逼近可解性成立.

1 准备工作

记 $W^{1,p}(\Omega)$为通常的 Sobolev 空间,v_N 为速度向量 v 在 Ω 的部分边界 Γ_1 法线方向的投影.

1999-06-30 收稿,1999-11-29 收修改稿

* 国家自然科学基金重大项目(批准号:59995440)、国家教育部高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:97014515)以及辽宁省科学技术基金(批准号:972201)资助项目

构造空间 $V=\{v=(v_1,v_2,v_3)\in W^{1,p}(\Omega)^3:\ v_N=0\}$并规定 $\|v\|_{1,p}=\left(\sum_{i=1}^{3}\|v_i\|_{1,p}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$，则 V 是 $W^{1,p}(\Omega)^3$ 的闭线性子空间[7]．文中记 $x_n\xrightarrow{w}x$ 为 x_n 弱收敛于 x．

下面先给出$(S)_+$型映射的概念，它是一类非线性单调型映射．

定义　设 X 是实 Banach 空间，X^* 是它的对偶空间．称 $T:X\to X^*$ 为$(S)_+$型映射是指：如果对任何$\{x_n\}\subset X$，$x_n\xrightarrow{w}x$ 且$\overline{\lim\limits_n}(Tx_n,\ x_n-x)\leqslant 0$，则 $x_n\to x$．

由文献[7]，设 $u,v\in V$，则塑性变形功率泛函的梯度映射 $\mathrm{d}\varphi_w(v)$满足

$$(\mathrm{d}\varphi_w(v),u)=\int_\Omega \alpha(x_1,x_2,x_3)\bar{\dot\varepsilon}(v)^{p-2}\langle\dot\varepsilon(v),\ \dot\varepsilon(u)\rangle\mathrm{d}\Omega.$$

且 $\mathrm{d}\varphi_w(v)$具有严格单调性，下面将证明 $\mathrm{d}\varphi_w(v)$是$(S)_+$型映射，它在逼近可解性讨论中起着十分重要的作用．

命题 1　塑性变形功率泛函的梯度映射 $\mathrm{d}\varphi_w(v)$是$(S)_+$型映射．

证　设 $Tv=\mathrm{d}\varphi_w(v)$，$\{v^n\}\subset V$，$v^n\xrightarrow{w}v\in V$ 且

$$\overline{\lim_n}(Tv^n,\ v^n-v)\leqslant 0. \tag{2}$$

首先，在 $L^p(\Omega)$内，$\mathrm{D}v^n\xrightarrow{w}\mathrm{D}v$，这里 $\mathrm{D}v$ 表示$\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}(i,j=1,2,3)$之一．因此，在 $L^p(\Omega)$内有，$\dot\varepsilon^i(v^n)\xrightarrow{w}\dot\varepsilon^i(v)$，$(i=1,2,\cdots,7)$．

其次，由$|\dot\varepsilon^i(v^n)|\leqslant\bar{\dot\varepsilon}(v^n)\leqslant\dot\varepsilon_g<\infty$，函数 $\dot\varepsilon^i(v^n)$ $(i=1,2,\cdots,7)$在 Ω 内绝对连续关于 n 一致成立．

再次，由 T 的严格单调性及(2)式，得 $\lim\limits_{n\to\infty}(Tv^n-Tv,\ v^n-v)=0$，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\alpha(x_1,x_2,x_3)(\bar{\dot\varepsilon}(v^n)^p-(\bar{\dot\varepsilon}(v^n)^{p-2}+\dot\varepsilon(v)^{p-2})\langle\dot\varepsilon(r^n),\ \dot\varepsilon(v)\rangle+\bar{\dot\varepsilon}(v)^p)\mathrm{d}\Omega=0, \tag{3}$$

因被积函数非负，这使被积函数列在 $L^1(\Omega)$中收敛于 0．故存在测度为零的子集 N 使得被积函数列在$\Omega-N$ 上收敛于 0．即：对$(x_1,x_2,x_3)\in\Omega-N$，有

$$\lim_{n\to\infty}((\bar{\dot\varepsilon}(v^n)^p-(\bar{\dot\varepsilon}(v^n)^{p-2}+\bar{\dot\varepsilon}(v)^{p-2})\dot\varepsilon(v^n)\dot\varepsilon(v)+\bar{\dot\varepsilon}(v)^p)=0. \tag{4}$$

由于对给定的$(x_1,x_2,x_3)\in\Omega-N$，数列 $\dot\varepsilon^i(v^n)(i=1,2,\cdots,7)$有界关于 n 一致成立．因此可以取数列 $\dot\varepsilon^i(v^n)$的收敛子列，仍用该记号，它收敛于 $\zeta^i(i=1,2,\cdots,7)$．我们记 $\zeta=(\zeta^1,\ \zeta^2,\ \zeta^3,\ \zeta^4,\ \zeta^5,\ \zeta^6,\ \zeta^7)$，由(4)式，得

$$|\zeta|^p-(|\zeta|^{p-2}+\bar{\dot\varepsilon}(v)^{p-2})\langle\zeta,\ \dot\varepsilon(v)\rangle+\bar{\dot\varepsilon}(v)^p=0,$$

则 $\zeta=\dot\varepsilon(v)$．因此向量 $\dot\varepsilon(v^n)$的任一收敛的子列都收敛于 $\dot\varepsilon(v)$．即 $\dot\varepsilon(v^n)$收敛于 $\dot\varepsilon(v)$．这样函数 $\dot\varepsilon(v^n)$在 Ω 上几乎处处收敛于$\dot\varepsilon(v)$．这与函数 $\dot\varepsilon^i(v^n)$在 Ω 内绝对连续关于 n 一致成立综合可得，$\dot\varepsilon^i(v^n)$在 $L^p(\Omega)$内强收敛于 $\dot\varepsilon^i(v)$，$(i=1,2,\cdots,7)$．

最后，对每个 $i,j=1,2,3$，$\partial v_i/\partial x_j$ 可由$\dot\varepsilon^i(v)$ $(i=1,2,\cdots,7)$线性表示．故 $\mathrm{D}v^n$ 在 $L^p(\Omega)$内强收敛于 $\mathrm{D}v$．这就证明了 T 是$(S)_+$型映射．

当采用简化的 Coulomb 摩擦模型时，摩擦功率泛函 $\varphi_f(v)$在中性点处不可微分，给数值计

算带来不少麻烦．但它具有下面有用的性质．

命题 2 摩擦功率泛函 $\varphi_f(v)$次可微分且 $\varphi_f(v)$的次微分$\partial\varphi_f$是极大单调映射．

证 由 $\varphi_f(v)$是连续的凸泛函[7]并利用有关次可微分的定理[9]可得此结论．

命题 3[7] 设 $\varphi(v)$是总能耗率泛函，则问题

$$\mathrm{P}\begin{cases}\varphi(v^*)\leqslant\varphi(v), & \forall v\in V,\\ v^*\in V,\end{cases}$$

存在唯一解 v^*．

由次微分的性质可得 $0\in\partial\varphi(v^*)$．

设(V_h) $(h\to 0)$是 V 的一族有限维闭子空间，则问题 P 的逼近问题为

$$\mathrm{P}^*:\begin{cases}\varphi(v_h^*)\leqslant\varphi(v), \ \forall v\in V_h,\\ v_h^*\in V_h.\end{cases}$$

注意 $\varphi(v)$在 V_h 上也满足$\varphi(v)$在 V 上相应的一些性质，因此不难得到

命题 4 问题 P^*有唯一解 v_h^* 且满足 $0\in\partial\varphi(v_h^*)$．

2 主要结论

定理 设 v^*是问题 P 的解，对每个 $h>0$，v_h^* 是问题 P^*的解．若存在 V 的稠密子集 V_1，使得对每个 $h>0$，有映射 P_h：$V_1\to V_h$ 满足$\forall v\in V_1$，有

$$\lim_{h\to 0}\|P_hv-v\|_{1,p}=0, \tag{5}$$

则在空间 V 中，有

$$\lim_{h\to 0}v_h^*=v^*. \tag{6}$$

证 首先证明$\{v_h^*\}$在 V 内有界．不然，若$\{v_h^*\}$无界，则可以找到一个子列，仍然用$\{v_h^*\}$表示，满足$\|v_h^*\|\to\infty$ $(h\to 0)$．因此由 $\varphi(v)$的强制性，$\varphi(v_h^*)\to\infty$．对任意给定的 $v\in V_1$，因 $\varphi(v_h^*)\leqslant\varphi(P_hv)$，则 $\varphi(P_hv)\to\infty$．而由 φ 的有界性，有$\{P_hv\}$无界．矛盾．

其次证明$\{v_h^*\}$弱收敛于 v^*．为此任意选取$\{v_h^*\}$的一个子列，仍然用$\{v_h^*\}$表示，使得 $v_h^*\xrightarrow{w}v_0\in V$．由总能耗率泛函 φ 是连续凸泛函，从而，φ 是弱下半连续泛函．由(5)式，

$$\varphi(v_0)\leqslant\varliminf_{h\to 0}\varphi(v_h^*)\leqslant\varliminf_{h\to 0}\varphi(P_hv)=\varphi(v)\qquad(v\in V_1),$$

再由 V_1 在 V 中稠密，则$\forall v\in V$，成立 $\varphi(v_0)\leqslant\varphi(v)$．由命题 3，$v_0=v^*$．即结论得证．

最后，我们证明$\{v_h^*\}$强收敛于 v^*．因 v^*和 v_h^* 分别是φ 和$\varphi|_{V_h}$的极小值点，由次微分的性质[9]，得

$$0\in\mathrm{d}\varphi_w(v^*)+\partial\varphi_f(v^*)+\mathrm{d}\varphi_t(v^*),$$

$$0\in\mathrm{d}\varphi_w(v_h^*)+\partial\varphi_f(v_h^*)+\mathrm{d}\varphi_t(v_n^*).$$

从而，有 $z\in\partial\varphi_f(v^*)$和 $z_h\in\partial\varphi_f(v_h^*)$，使得

$$\mathrm{d}\varphi_w(v^*)+z+\mathrm{d}\varphi_t(v^*)=0, \tag{7}$$

$$\mathrm{d}\varphi_w(v_h^*)+z_h+\mathrm{d}\varphi_t(v_h^*)=0. \tag{8}$$

由 $\varphi_t(v)$是有界线性泛函[7]且不难验证它是 Frechet 可微分．因此

$$\lim_{h\to 0}(\mathrm{d}\varphi_t(v_h^*) - \mathrm{d}\varphi_t(v^*),\ v_h^* - v^*) = 0. \tag{9}$$

由命题 2,$\partial\varphi_f(v)$是极大单调映射．当然有

$$(z_h - z,\ v_h^* - v^*) \geqslant 0, \tag{10}$$

从(7)~(10)式,有

$$\overline{\lim_{h\to 0}}(\mathrm{d}\varphi_w(v_h^*),\ v_h^* - v^*) \leqslant 0.$$

由命题 1 和$(S)_+$型映射的定义可得,在 V 内,有 $\lim\limits_{h\to 0} v_h^* = v^*$.

注　由 Sobolev 空间的插值理论[10],关于节点速度的形函数能使条件(5)成立．因而,在热轧过程中,使用 Coulomb 摩擦条件的刚塑性有限元中的可压缩法所得的解必收敛于变分问题的解,这从理论上保证了该方法是可行的．

参　考　文　献

1　森谦一郎,岛进,小坂田．刚塑性有限要素法による多孔质金属の塑性加工の解析．日本机械学会论文集(A 编),1979,45(396):955

2　森谦一郎,岛进,小坂田．多孔质体の塑性力学式应用した刚塑性有限要素法による自由锻造の解析．日本机械学会论文集(A 编),1979,45(396):965

3　Osakada K, Nakano J, Mori M, et al. Finite element method for rigid-plastic analysis of metal forming formulation for finite deformation. Int J Mech Sic, 1982, 24(8): 459

4　Mori K, Osakada K, Oda T. Simulation of plane strain rolling by the rigid-plastic finite element method. Int J Mech Sic, 1982, 24(9): 518

5　Xiong S W, Liu X H, Wang G D, et al. Simulation of slab edging by the 3-D rigid-plastic FEM. J Materials Processing Technology, 1997, 69: 37

6　Liu Xianghua. Variational principle for rigid-plastic compressible materials. Chinese Science Bulletin, 1990, 35(8): 692

7　宋叔尼,刘相华,王国栋．刚塑性可压缩材料热轧问题总能耗率泛函极值的存在与唯一性．科学通报．1999,44(17):1 898

8　刘相华．刚塑性有限元及其在轧制中的应用．北京:冶金工业出版社,1994

9　赵义纯．非线性泛函分析及其应用．北京:高等教育出版社,1989

10　Ciarlet P G. The Finite Element Methods for Elliptic Problems. Amsterdam: North Holland, 1978